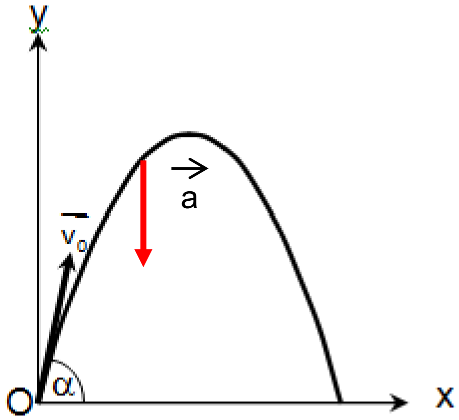
CORRECTION EXERCICE N°3 « RUGBY » CHAPITRE 6

1.1.1 Cette question correspond à l'étape n°2 de la démonstration permettant d'obtenir les équations horaire du mouvement



Etape n°2 : équations horaires du vecteur accélération

Considérons le système dans le référentiel terrestre (supposé galiléen) en chute libre. Il n'est soumis qu'à son poids.

Appliquons la deuxième loi de Newton : $\vec{P} = m.\vec{a}$

soit $m.\vec{g} = m.\vec{a}$ donc $\vec{g} = \vec{a}$ *d'où g=a*

Par projection sur l'axe Oy vertical orienté vers le haut, il vient $a_x=0$ et $a_y = -a = -g$

Ainsi le vecteur accélération a pour équations horaires

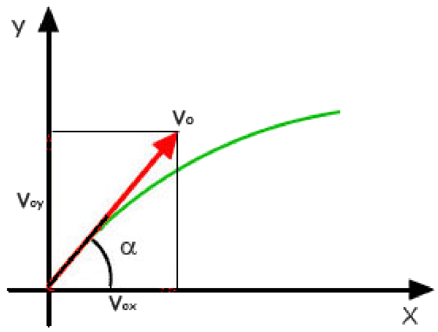
$$\boxed{\vec{a}\ (a_x=0,\ a_y = -a = -g)}$$

1.1.2. A partir de maintenant, nous retombons sur la démonstration classique

Etape n°1 : conditions initiales

à t=0s, le système {ballon} est lâché avec une vitesse $\vec{V_0}$ faisant un angle α avec l'horizontale (voir croquis ci-dessous), donc le vecteur vitesse a pour coordonnées

$$\vec{V}\ (V_x=V_0.\cos\alpha,\ V_y= V_0.\sin\alpha)$$



à t = 0, le ballon est situé en un point d'abscisse x = 0 et y=0 d'où les coordonnées du vecteur position

$$\vec{OM}\ (x=0\ ;\ y=0)$$

Etape n°3 : équations horaires du vecteur vitesse

Par définition, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

soit $a_x = \frac{dV_x}{dt}$ et $a_x = 0$

donc en primitivant, on obtient Vx=cste 1

Pour trouver la valeur de la cste1, il faut utiliser les conditions initiales (étape n°1)

A t=0s Vx = cste1 et Vx= $V_0.\cos\alpha$ (etape1) donc cste1 = $V_0.\cos\alpha$

d'où : Vx = $V_0.\cos\alpha$

de même $a_y = \frac{dV_y}{dt}$ et $a_y = -g$ *d*onc en primitivant, on obtient $y_y = -g.t$ + cste2

Pour trouver la valeur de la cste2, il faut utiliser les conditions initiales (étape n°1)

à t=0s Vy = -g*0 + cste2 = cste 2 et Vy= $V_0.\sin\alpha$ (etape1) donc cste2 = $V_0.\sin\alpha$

d'où $Vy = -g.t + V_0.\sin\alpha$

Au final, le vecteur vitesse a pour équations horaires $\boxed{\vec{V}\ (V_x= V_0.\cos\alpha,\ V_y=-g.t + V_0.\sin\alpha)}$

Etape n°4 : équations horaires du vecteur position

Par définition $\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$

Soit $V_x = \frac{dx}{dt}$ et $V_x= V_0.\cos\alpha$

Donc en primitivant on obtient x= $V_0.\cos\alpha$. t + cste3

Pour trouver la valeur de la cste3, il faut utiliser les conditions initiales (étape n°1)

à t=0s $x = V_0.\cos\alpha.0+cste3 = cste3$ et $x= 0$ (etape1) donc cste3 = 0
d'où $x = V_0.\cos\alpha.t$

de même $V_y = \dfrac{dy}{dt}$

et $V_z=-g.t + V_0.\sin\alpha$ donc en primitivant on obtient $z= - \frac{1}{2}\, g.t^2 + V_0.\sin\alpha.t$ + cste4.

Pour trouver la valeur de la cste4, il faut utiliser les conditions initiales (étape n°1)
à t=0s $y = - \frac{1}{2}\, g.0^2 + V_0.\sin\alpha.0+ cste4 = cste4$ et $y= 0$ (etape1) donc cste4 = 0
d'où $y = - \frac{1}{2}\, g.t^2 + V_0.\sin\alpha.t$
Au final, le vecteur position a pour équations horaires

$$\boxed{\overrightarrow{OM}\,(\underbrace{x=V_0.\cos\alpha.t}_{❶},\ \underbrace{y = - \tfrac{1}{2}\, g.t^2 + V_0.\sin\alpha.t}_{❷}}$$

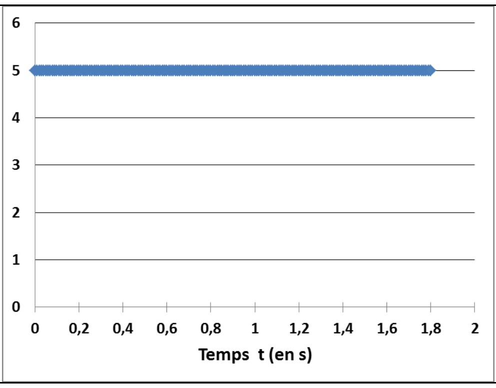
1.1.3. L'équation de la trajectoire revient à chercher vy=f(x) (Etape n°5)

On isole le temps « t » de l'équation ❶ précédente $x = (v_0.\cos\alpha).t$ soit $t = \dfrac{x}{v_0.\cos\alpha}$

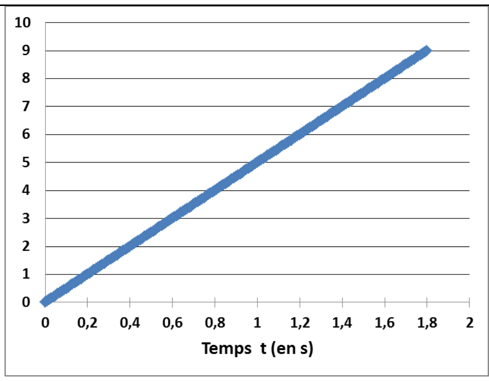
Pour avoir l'équation de la trajectoire y(x), on reporte l'expression de t dans y soit l'équation ❷ :

$$y(x) = -\frac{1}{2}g\cdot\left(\frac{x}{v_0.\cos\alpha}\right)^2 + v_0.\sin\alpha.\left(\frac{x}{v_0.\cos\alpha}\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{y(x) = -\frac{g}{2.(v_0.\cos\alpha)^2}.x^2 + \tan\alpha.x}$$

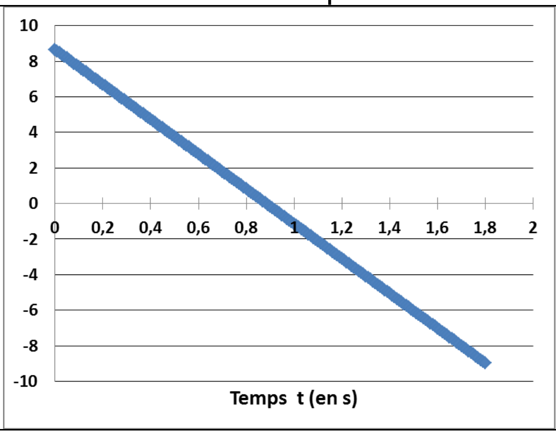
1.1.4.



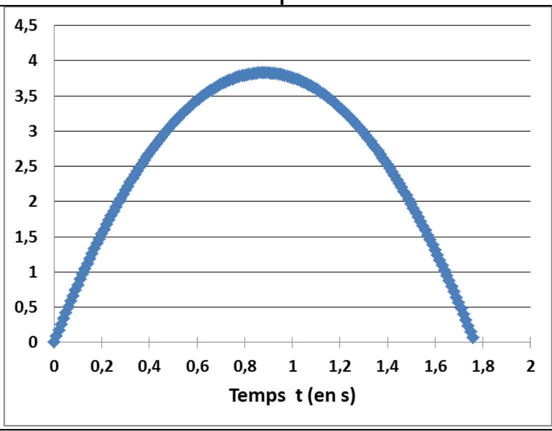
Équation : $\mathbf{v_x(t) = v_0.\cos\alpha}$ = cste
Justification : le graphe est une droite horizontale. Seule la composante v_x est constante au cours du temps.



Équation : $\mathbf{x(t) = v_0.\cos\alpha.t}$
Justification : le graphe est une droite passant par l'origine. Seule la composante x(t) est une fonction linéaire du temps.



Équation : $\mathbf{v_y(t) = - g.t + v_0.\sin\alpha}$
Justification : le graphe est une droite décroissante, donc son coefficient directeur est négatif. Seule la composante v_y est une fonction affine avec un coefficient directeur négatif (– g).



Équation : $\mathbf{y(t) = - \frac{1}{2}.g.t^2 + v_0.\sin\alpha.t}$
Justification : le graphe est une parabole de concavité tournée vers le bas. Seule la composante y(t) est une fonction parabolique du temps.

1.2.1. Une « chandelle » réussie

Lorsque le ballon touche le sol, y = o et y= - ½ $g.t^2$ + V_0.sinα.t (question1.1.2)

$$\text{soit } -\frac{1}{2}g\cdot t^2+v_0.\sin\alpha.t=0 \quad \text{donc} \quad \left(-\frac{1}{2}g\cdot t+v_0.\sin\alpha\right).t=0$$

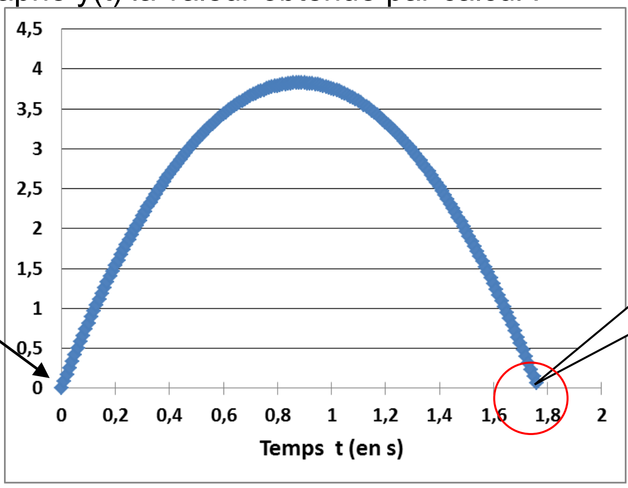
La solution t = 0 correspond au moment où le ballon est frappé par le rugbyman à l'origine du repère.

La solution $-\frac{1}{2}g\cdot t+v_0.\sin\alpha=0$ correspond à la date pour laquelle le joueur récupère le ballon :

$$-\frac{1}{2}g\cdot t+v_0.\sin\alpha=0 \quad \text{soit } \frac{1}{2}g\cdot t=v_0.\sin\alpha \quad \text{d'où : } t=\frac{2.v_0.\sin\alpha}{g}$$

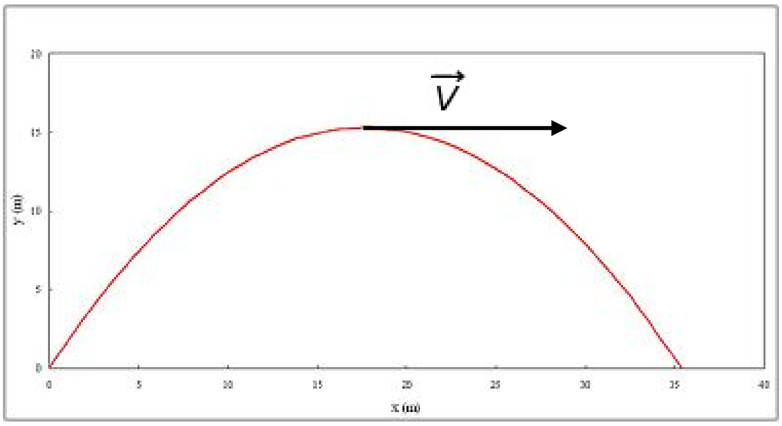
Soit $t=\frac{2\times 10\times \sin(60)}{9{,}81}$ = **1,8 s.**

On vérifie bien sur le graphe y(t) la valeur obtenue par calcul :



Date pour laquelle le joueur récupère le ballon.

1.2.2.a. on sait que Vy=-g.t + V_0.sinα et quand le ballon est au somment de sa trajectoire, le vecteur vitesse est horizontal donc Vy=0



1.2.2.b. On a donc -g.t + V_0.sinα=0

Soit t= V_0.sinα/g=10.sin60/9.81=0,88s

On reporte dans l'expression

y= - ½ $g.t^2$ + V_0.sinα.t = -1/2x9,81x0,88² + 10xsin60x0,88=3,8 m

Remarque : ces valeurs sont correctes si on regarde les graphiques